

二阶矩阵环的交换图的自同构*

周津名^{1,2}

(1. 中国矿业大学理学院, 江苏 徐州 221116;
2. 合肥师范学院数学与统计学院, 安徽 合肥 230601)

摘 要: 设 $\Gamma(M)$ 为有限域上二阶矩阵环的交换图, 通过构造 $\Gamma(M)$ 的压缩图并研究两图的自同构群之间的关系, 完全刻画出 $\Gamma(M)$ 的所有自同构。

关键词: 矩阵环; 非交换环; 交换图; 自同构

中图分类号: O153.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2016) 01-0039-05

Automorphisms of the commuting graph over 2×2 matrix ring

ZHOU Jinming^{1,2}

(1. School of Sciences, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116, China;
2. School of Mathematics and Statistics, Hefei Normal University, Hefei 230601, China)

Abstract: Let $\Gamma(M)$ be the commuting graph of 2×2 matrix ring over a finite field. The compressed graph of $\Gamma(M)$ is constructed and the relationship of the automorphism groups of these two graphs is studied, then all the automorphisms of $\Gamma(M)$ are determined.

Key words: matrix rings; noncommutative rings; commuting graphs; automorphisms

近年来, 很多学者致力于研究两个同构的交换图所对应的非交换环之间的关系及交换图的参数问题^[1-8]。与此同时, 我们注意到关于图的自同构问题的研究已取得很多成果, 例如强正则图、广义正交图、循环图、零因子图、Cayley 图等图的自同构的刻画^[9-13], 但对于交换图的自同构问题的研究却较为滞后。到目前为止, 我们仅仅搜索到两篇论文研究有限群的交换图的自同构^[14-15], 且目前还没有公开发表的完全刻画非交换环的交换图的自同构群的论文, 而研究交换图的自同构群有助于研究代数系统上保交换的非线性映射。基于此, 本文致力于研究有限域上二阶矩阵环的交换图 $\Gamma(M)$ 的自同构群, 并将其完全刻画出来。

1 预备知识

本文讨论的图均为简单图。对图 Γ , 通常用 $V(\Gamma)$ 表示 Γ 的顶点集。对顶点 $x \in V(\Gamma)$, 用 $N(x) = \{y \in V(\Gamma) \mid y \text{ 与 } x \text{ 邻接}\}$ 表示 x 在 Γ 中的邻集。设 $\mathcal{A} \subseteq V(\Gamma)$, 若 $\mathcal{A}$ 中的任意两个不同的顶点在 Γ 中均邻接, 则称 $\mathcal{A}$ 为 Γ 的一个团; 若 $\mathcal{A}$ 中的任意两个不同的顶点在图 Γ 中均不邻接, 则称 $\mathcal{A}$ 为 Γ 的一个独立集。若 $V(\Gamma)$ 上一个双射 σ 保持 Γ 顶点间的邻接关系 (即 x 与 y 邻接当且仅当 $\sigma(x)$ 与 $\sigma(y)$ 邻接), 则称 σ 为 Γ 的一个自同构。 Γ 的所有自同构形成的群称为 Γ 的自同构群, 记为 $\text{Aut}(\Gamma)$ 。设 n 为正整数, 记 S_n 为 n 次对称群。

* 收稿日期: 2015-07-07

基金项目: 国家自然科学基金青年科学基金资助项目 (11401570); 江苏省自然科学基金青年基金资助项目 (BK20140177); 2014 年江苏省普通高校研究生科研创新计划资助项目 (KYZZ_0371)

作者简介: 周津名 (1982 年生), 女; **研究方向:** 代数图论; E-mail: zjminguv@163.com

设 $\mathcal{B}$ 为一个集合, $|\mathcal{B}|$ 表示 $\mathcal{B}$ 的基数, $S_{\mathcal{B}}$ 表示 $\mathcal{B}$ 上的置换群。

设 R 为非交换环, 其中心记为 $Z(R)$ 。 R 的交换图 $\Gamma(R)$ (见文献 [1]) 是指以 $R \setminus Z(R)$ 为顶点集, 两个顶点 x 与 y 邻接当且仅当 $x \neq y$ 且 $xy = yx$ 。对 $x \in R$, 记 x 的中心化子为 $C(x) = \{y \in R \mid xy = yx\}$ 。在 R 中规定关系 $\sim: x \sim y$ 当且仅当 $C(x) = C(y)$ 。显然 $\sim$ 是 R 上的等价关系, 则该等价关系决定了 R 的一个分类, 不妨设 $R = Z(R) \cup (\cup_{i=1}^k [a_i])$, 其中 $a_i \notin Z(R)$, $[a_i] = \{b \in R \mid b \sim a_i\} = \{b \in R \mid C(b) = C(a_i)\}$ 。故 R 的交换图 $\Gamma(R)$ 的顶点集有如下分类 $V(\Gamma(R)) = R \setminus Z(R) = \cup_{i=1}^k [a_i]$ 。易证对任意的 $[a_i], [a_j] \in \cup_{i=1}^k [a_i]$ 及 $a_s \in [a_i], a_t \in [a_j]$, 均有 $a_i a_j = a_j a_i$ 当且仅当 $a_s a_t = a_t a_s$ 。令 $\Gamma_E(R)$ 为以 $\{[a_1], [a_2], \dots, [a_k]\}$ 为顶点集, 两个不同顶点 $[a_i]$ 与 $[a_j]$ 相邻接当且仅当 $a_i a_j = a_j a_i$, 并称 $\Gamma_E(R)$ 为 $\Gamma(R)$ 的压缩图。

设 F 是含 q 个元素的有限域, $F^* = F \setminus \{0\}$, $M_2(F)$ 为 F 上的所有二阶矩阵构成的环, E_{ij} 为 $M_2(F)$ 中 (i, j) 元为 1 其余元为 0 的矩阵单位, I 为 $M_2(F)$ 的单位阵, 则环 $M_2(F)$ 的中心为 $Z = \{aI \mid a \in F\}$ 。对 $A \in M_2(F)$, 记 $F[A]$ 为域 F 上的关于 A 的多项式全体。简记 $\Gamma(M)$ 为 $M_2(F)$ 的交换图, 即以 $M_2(F) \setminus Z$ 为顶点集, 两个不相同的顶点 A 与 B 相邻接当且仅当 $AB = BA$ 。本节主要研究 $M_2(F) \setminus Z$ 中矩阵的中心化子, 为研究 $\Gamma(M)$ 及其压缩图 $\Gamma_E(M)$ 的结构及其自同构群做准备。

引理 1 设 $A, B \in M_2(F)$, 则

(i) $F[A] = \{aA + bI \mid a, b \in F\}$,

(ii) $F[A] = F[B]$ 当且仅当存在 $a \in F^*, b \in F$ 使得 $A = aB + bI$ 。

证明

(i) 通过直接计算, 易证对任意的 $A \in M_2(F)$ 均存在 $a, b \in F$ 使得 $A^2 = aA + bI$, 进而 $F[A] = \{aA + bI \mid a, b \in F\}$ 。

(ii) “ $\Leftarrow$ ” 若 $A = aB + bI$, 其中 $a \in F^*, b \in F$, 则由 (i) 可得

$$\begin{aligned} F[A] &= \{cA + dI \mid c, d \in F\} = \\ &\{acB + (bc + d)I \mid c, d \in F\} \subseteq F[B], \\ F[B] &= \{cB + dI \mid c, d \in F\} = \\ &\{a^{-1}cA + (d - a^{-1}bc)I \mid c, d \in F\} \subseteq F[A] \end{aligned}$$

故 $F[A] = F[B]$ 。

“ $\Rightarrow$ ” 若 $F[A] = F[B]$, 则存在 $a, b, c, d \in F$ 使得 $A = aB + bI$, $B = cA + dI$ 。从而 $A = acA + (ad - b)I$, $B = acB + (bc + d)I$, 进而

$$\begin{cases} (1 - ac)A = (ad - b)I \\ (1 - ac)B = (bc + d)I \end{cases} \quad (1)$$

若 $A \notin Z$ 或者 $B \notin Z$, 则由 (1) 式可知 $ac = 1$, 进而 $a \in F^*, A = aB + bI$ 。若 $A, B \in Z$, 则显然有 $A = B + (A - B + I)$, $B = A + (B - A + I)$ 满足条件。证毕。

引理 2 设 $A \in M_2(F) \setminus Z$, 则 $C(A) = F[A]$, $C(A) \setminus Z = \{aA + bI \mid a \in F^*, b \in F\}$ 。

证明 一方面, 对任意的 $A \in M_2(F) \setminus Z$, 显然有 $A \in C(A)$, 从而 $F[A] \subseteq C(A)$ 。另一方面, 对任意的 $B \in C(A) \setminus Z$, 假设 A 的 $(1, 1)$ 元为 a_1 , B 的 $(1, 1)$ 元为 b_1 , 设 $A - a_1I = \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, $B - b_1I = \begin{pmatrix} 0 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ 。由 $AB = BA$ 可知 $A - a_1I$ 与 $B - b_1I$ 可换, 故

$$\begin{pmatrix} a_2b_3 & a_2b_4 \\ a_4b_3 & a_3b_2 + a_4b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2a_3 & b_2a_4 \\ b_4a_3 & b_3a_2 + b_4a_4 \end{pmatrix},$$

从而

$$\begin{cases} a_2b_3 = b_2a_3 \\ a_2b_4 = b_2a_4 \\ a_4b_3 = b_4a_3 \end{cases} \quad (2)$$

由 (2) 式可知, 对任意的 $2 \leq i, j \leq 4$ 均有 $a_ib_j = b_ia_j$, 进而

$$\begin{aligned} b_i(A - a_1I) &= \begin{pmatrix} 0 & b_ia_2 \\ b_ia_3 & b_ia_4 \end{pmatrix} = \\ &\begin{pmatrix} 0 & a_ib_2 \\ a_ib_3 & a_ib_4 \end{pmatrix} = a_i(B - b_1I) \end{aligned} \quad (3)$$

由于 $A, B \notin Z$, 故 $A - a_1I, B - b_1I$ 均不是零矩阵, 故存在 $2 \leq i_0 \leq 4$ 使得 $a_{i_0} \neq 0$, 结合 (3) 式可知, $b_{i_0} \neq 0, b_{i_0}(A - a_1I) = a_{i_0}(B - b_1I)$, 且 $B = a_{i_0}^{-1}b_{i_0}A + (b_1 - a_{i_0}^{-1}b_{i_0}a_1)I$ 。令 $a = a_{i_0}^{-1}b_{i_0}, b = b_1 - a_{i_0}^{-1}b_{i_0}a_1$, 则 $a \in F^*, b \in F, B = aA + bI$, 即

$$C(A) \setminus Z = \{aA + bI \mid a \in F^*, b \in F\},$$

$$C(A) = \{aA + bI \mid a \in F^*, b \in F\} \cup$$

$$Z = \{aA + bI \mid a, b \in F\} = F[A]$$

证毕。

2 主要结论

本节构造了 $\Gamma(M)$ 的压缩图 $\Gamma_E(M)$, 通过研究 $\Gamma_E(M)$ 的自同构群及 $\text{Aut}(\Gamma(M))$ 与 $\text{Aut}(\Gamma_E(M))$ 之间的关系, 刻画了 $\Gamma(M)$ 的自同构群。

下面给出 $\Gamma(M)$ 的压缩图。在给定的非交换

环 $M_2(F)$ 中规定关系 $\sim: A \sim B$ 当且仅当 $C(A) = C(B)$ 。则 $\Gamma(M)$ 的顶点集有如下分类

$$V(\Gamma(M)) = M_2(F) \setminus Z = \bigcup_{i=1}^k [A_i] \quad (4)$$

其中 $A_i \notin Z$, $[A_i] = \{B \in M_2(F) \mid B \sim A_i\} = \{B \in M_2(F) \mid C(B) = C(A_i)\} = \{aA_i + bI \mid a \in F^*, b \in F\}$ 。对每一个 A_i 均有 $|[A_i]| = |\{aA_i + bI \mid a \in F^*, b \in F\}| = q(q-1)$, 且 $|M_2(F) \setminus Z| = q^4 - q$, 故 (4) 式右端为 $k = \frac{q^4 - q}{q(q-1)} = q^2 + q + 1$ 个非空集合的并。事实上,

$$\begin{aligned} V(\Gamma(M)) = & \{[E_{11} + aE_{12}], [E_{21} + aE_{22}], [E_{12} + aE_{22}], \\ & [E_{11} + bE_{12} + cE_{21}] \mid a \in F, b, c \in F^*\} \end{aligned}$$

故 $\Gamma(M)$ 的压缩图 $\Gamma_E(M)$ 以 $\{[A_i] \mid i = 1, 2, \dots, q^2 + q + 1\}$ 为顶点集, 两个不相同的顶点 $[A_i]$ 与 $[A_j]$ 相邻接当且仅当 $A_i A_j = A_j A_i$ 。

引理 3 设 $A, B \in M_2(F) \setminus Z$, 则 $AB = BA$ 当且仅当 $[A] = [B]$ 。

证明 若 $AB = BA$, 则由引理 2 可得,

$$B \in C(A) \setminus Z = \{aA + bI \mid a \in F^*, b \in F\}$$

故存在 $a_0 \in F^*, b_0 \in F$ 使得 $B = a_0 A + b_0 I$, 进而 $C(B) = C(a_0 A + b_0 I) = C(A)$, 从而 $[A] = [B]$ 。反之, 若 $[A] = [B]$, 则 $C(A) = C(B)$, 进而 $F[A] = F[B]$, 再由引理 1 可知存在 $a \in F^*, b \in F$ 使得 $B = aA + bI$, 故 $AB = BA$ 。证毕。

接下来讨论 $\Gamma_E(M)$ 的结构及其自同构群, 然后再回到 $\Gamma(M)$ 来讨论 $\Gamma(M)$ 的自同构群。

引理 4 $\Gamma_E(M)$ 为顶点数为 $q^2 + q + 1$ 的独立集, 且 $\text{Aut}(\Gamma_E(M)) \cong S_{q^2+q+1}$ 。

证明 由 $\Gamma_E(M)$ 的定义可知,

$$V(\Gamma_E(M)) = \{[A_i] \mid i = 1, 2, \dots, q^2 + q + 1\}$$

若 $\Gamma_E(M)$ 有一条边从顶点 $[A_i]$ 到顶点 $[A_j]$, 则 $A_i A_j = A_j A_i$ 。由引理 3 可知 $[A_i] = [A_j]$, 矛盾。故 $\Gamma_E(M)$ 中没有边, 其为独立集。从而 $V(\Gamma_E(M))$ 的任一置换均为 $\Gamma_E(M)$ 的自同构, 故 $\text{Aut}(\Gamma_E(M)) \cong S_{q^2+q+1}$ 。证毕。

下述引理讨论了 $\Gamma(M)$ 的具体结构, 其结论和文献 [1] 的定理 2 一致, 但该引理明确给出了 $\Gamma(M)$ 的 $q^2 + q + 1$ 个团。

引理 5 $\Gamma(M)$ 为 $q^2 + q + 1$ 个团的不交并, 且每个团的大小为 $q(q-1)$ 。

证明 由于 $\Gamma(M)$ 的顶点集为 $M_2(F) \setminus Z = \bigcup_{i=1}^{q^2+q+1} [A_i]$ 。由引理 3 可知, 对任意 $A, B \in M_2(F) \setminus Z$, $AB = BA$ 当且仅当 $[A] = [B]$, 即 $\Gamma(M)$ 中两个不相同的顶点 A 与 B 相邻接当且仅当

$[A] = [B]$ 。从而每一个 $[A_i]$ 均为 $\Gamma(M)$ 的团, 且任意两个不同的团 $[A_i]$ 与 $[A_j]$ 不相交, 故 $\Gamma(M)$ 为 $q^2 + q + 1$ 个团的不交并, 且每个团的大小为 $|[A_i]| = q(q-1)$ 。证毕。

引理 6 对任意的 $\sigma \in \text{Aut}(\Gamma(M))$, $1 \leq i, j \leq q^2 + q + 1$, 若存在 $A \in [A_i]$ 使得 $\sigma(A) \in [A_j]$, 则 $\sigma([A_i]) = [A_j]$ 。

证明 设 $B \in [A_i]$ 且 $B \neq A$, 则 $[B] = [A_i] = [A]$ 。由引理 3 得 $AB = BA$, 从而在 $\Gamma(M)$ 中 A 和 B 邻接, 进而 $\sigma(A)$ 和 $\sigma(B)$ 邻接, 故 $\sigma(A)\sigma(B) = \sigma(B)\sigma(A)$ 。由引理 3 可得 $[\sigma(B)] = [\sigma(A)] = [A_j]$, 即 $\sigma(B) \in [A_j]$ 。从而 $\sigma([A_i]) \subseteq [A_j]$ 。由 $|[A_i]| = q(q-1) = |[A_j]|$ 且 σ 为双射可知 $\sigma([A_i]) = [A_j]$ 。证毕。

对任意的 $[A_i]$, $1 \leq i \leq q^2 + q + 1$, 令 σ_i 为 $V(\Gamma(M))$ 上的双射, 满足 $\sigma_i([A_i]) = [A_i]$, 且当 $B \in V(\Gamma(M)) \setminus [A_i]$ 时有 $\sigma_i(B) = B$, 即 σ_i 置换了团 $[A_i]$ 内的顶点, 同时稳定 $[A_i]$ 外的顶点。显然 σ_i 为 $\Gamma(M)$ 的自同构, 令 $\Sigma_i = \{\sigma_i \mid \sigma_i([A_i]) = [A_i], \sigma_i(B) = B, B \in V(\Gamma(M)) \setminus [A_i]\}$, 则 Σ_i 为 $\text{Aut}(\Gamma(M))$ 的子群, 且 $\Sigma_i \cong S_{q(q-1)} \cong S_{q^2+q+1}$ 。接下来研究 $\text{Aut}(\Gamma(M))$ 与 $\text{Aut}(\Gamma_E(M))$ 之间的关系。

$$\text{定理 1} \quad \text{Aut}(\Gamma(M)) / \prod_{i=1}^{q^2+q+1} \Sigma_i \cong \text{Aut}(\Gamma_E(M))。$$

证明 显然, 有:

$$V(\Gamma(M)) = \bigcup_{i=1}^{q^2+q+1} [A_i],$$

$$V(\Gamma_E(M)) = \{[A_i] \mid i = 1, 2, \dots, q^2 + q + 1\}$$

以下分三个步骤来证明本定理。

第一步: 证明每一个 $\sigma \in \text{Aut}(\Gamma(M))$ 均诱导一个 $\sigma' \in \text{Aut}(\Gamma_E(M))$ 。

对任意 $\sigma \in \text{Aut}(\Gamma(M))$, 令 σ' 为 $V(\Gamma_E(M))$ 上的映射, 且 $\sigma'([A_i]) = \sigma([A_i])$, $i = 1, 2, \dots, q^2 + q + 1$, 下面分四步证明 $\sigma' \in \text{Aut}(\Gamma_E(M))$ 。

(i) σ' 有意义。由 σ 为 $V(\Gamma(M))$ 上的双射可知, 对任意 A_i 有 $\sigma(A_i) \in V(\Gamma(M)) = \bigcup_{i=1}^{q^2+q+1} [A_i]$, 故存在唯一的 $1 \leq j \leq q^2 + q + 1$ 使得 $\sigma(A_i) \in [A_j]$ 。又由引理 6 可知 $\sigma'([A_i]) = \sigma([A_i]) = [A_j] \in V(\Gamma_E(M))$, 故 σ' 有意义。

(ii) σ' 是单射。若 $\sigma'([A_i]) = \sigma'([A_j])$, 则 $\sigma([A_i]) = \sigma([A_j])$, 由 σ 为 $V(\Gamma(M))$ 的双射可知 $[A_i] = [A_j]$, 即 σ' 是 $V(\Gamma_E(M))$ 的单射。

(iii) σ' 是满射。对任意 $[A_j]$, 由于 σ 为 $V(\Gamma(M))$ 上的双射, 故存在 $i = 1, 2, \dots, q^2 + q + 1$, $A \in [A_i]$ 使得 $\sigma(A) \in [A_j]$ 。由引理 6 知

$\sigma'([A_i]) = \sigma([A_i]) = [A_j]$, 即 σ' 为满射。

(iv) σ' 为 $\Gamma_E(M)$ 的自同构。由 (i) - (iii) 可知, σ' 为 $V(\Gamma_E(M)) = \{[A_i] \mid i = 1, 2, \dots, q^2 + q + 1\}$ 上的双射, 由于 $\Gamma_E(M)$ 为独立集, 故 $V(\Gamma_E(M))$ 上的任意双射均为 $\Gamma_E(M)$ 的自同构, 故 $\sigma' \in \text{Aut}(\Gamma_E(M))$ 。

第二步: 证明 $\varphi: \text{Aut}(\Gamma(M)) \mapsto \text{Aut}(\Gamma_E(M))$, $\sigma \mapsto \sigma'$ 为满同态。

欲证 φ 为满同态, 只需证明 φ 为满射且为同态映射, 我们分两步进行证明。

(v) φ 为满射。注意到对任意的 $\sigma' \in \text{Aut}(\Gamma_E(M))$, $1 \leq i \leq q^2 + q + 1$, 均有 $|[A_i]| = q(q-1) = |\sigma'([A_i])|$ 。可令 σ 为 $V(\Gamma(M))$ 上满足 $\sigma([A_i]) = \sigma'([A_i])$, $1 \leq i \leq q^2 + q + 1$ 的双射, 下证 $\sigma \in \text{Aut}(\Gamma(M))$ 。一方面, 对任意 $A, B \in V(\Gamma(M))$, 若 A 与 B 邻接, 则 $A \neq B$ 且 $AB = BA$, 从而 $[A] = [B]$ 。不妨设 $[A] = [B] = [A_i]$, 其中 $1 \leq i \leq q^2 + q + 1$, 则存在 $1 \leq j \leq q^2 + q + 1$ 使得

$$\sigma([A]) = \sigma'([A]) = \sigma'([A_i]) = [A_j],$$

$$\sigma([B]) = \sigma'([B]) = \sigma'([A_i]) = [A_j]$$

故

$$\sigma(A) \in \sigma([A]) = [A_j], \sigma(B) \in \sigma([B]) = [A_j]$$

而 $[A_j] = \{aA_j + bI \mid a \in F^*, b \in F\}$ 中的任意两个矩阵均可换, 故 $\sigma(A)$ 和 $\sigma(B)$ 可换。又由 $A \neq B$ 且 σ 为双射可知 $\sigma(A) \neq \sigma(B)$ 。故在 $\Gamma(M)$ 中 $\sigma(A)$ 和 $\sigma(B)$ 邻接。另一方面, 若 $\sigma(A)$ 和 $\sigma(B)$ 在 $\Gamma(M)$ 中邻接, 则 $\sigma(A) \neq \sigma(B)$ 且 $\sigma(A)$ 和 $\sigma(B)$ 可换。由 $\sigma(A) \neq \sigma(B)$ 和 σ 为双射易得 $A \neq B$ 。假设 $AB \neq BA$, 则由引理 3 可知 $[A] \neq [B]$, 从而 $[A]$ 和 $[B]$ 在独立集 $\Gamma_E(M)$ 中不邻接, 进而 $\sigma'([A])$ 和 $\sigma'([B])$ 在 $\Gamma_E(M)$ 中不邻接。而 $\sigma([A]) = \sigma'([A])$, $\sigma([B]) = \sigma'([B])$, 故 $\sigma([A])$ 的任一矩阵与 $\sigma([B])$ 中的矩阵均不可换, 从而 $\sigma(A)$ 和 $\sigma(B)$ 不可换, 矛盾。故假设不成立, 即 $AB = BA$ 。故 $\sigma \in \text{Aut}(\Gamma(M))$, φ 为满射。

(vi) φ 为同态映射。对任意的 $\sigma_1, \sigma_2 \in \text{Aut}(\Gamma(M))$, 结合引理 6 可知, 对任意 $[A_i]$ 存在 $[A_j]$ 使 $\sigma_2([A_i]) = [A_j]$, 则

$$(\sigma_1\sigma_2)([A_i]) = \sigma_1(\sigma_2([A_i])) = \sigma_1([A_j]) = \sigma_1'([A_j]) = \sigma_1'(\sigma_2([A_i])) = \sigma_1'\sigma_2'([A_i])$$

又 $(\sigma_1\sigma_2)([A_i]) = (\sigma_1\sigma_2)'([A_i])$, 从而 $(\sigma_1\sigma_2)' = \sigma_1'\sigma_2'$, 即 φ 为同态映射。

第三步: 证明满同态 φ 的核为

$$\text{Ker}(\varphi) = \prod_{i=1}^{q^2+q+1} \Sigma_i$$

一方面, 若 $\varphi(\sigma) = \sigma'$ 为 $V(\Gamma_E(M))$ 上的恒等自同构, 则对任意的 $1 \leq i \leq q^2 + q + 1$ 均有 $\sigma'([A_i]) = [A_i]$, 即

$$\sigma([A_i]) = [A_i], 1 \leq i \leq q^2 + q + 1$$

故 $\sigma \in \prod_{i=1}^{q^2+q+1} \Sigma_i$, 进而 $\text{Ker}(\varphi) \subseteq \prod_{i=1}^{q^2+q+1} \Sigma_i$ 。

另注意到每一个 $\delta \in \prod_{i=1}^{q^2+q+1} \Sigma_i$ 均为 $V(\Gamma(M))$ 上的稳定所有 $[A_i]$ (即 $\delta([A_i]) = [A_i]$) 且仅仅置换 $[A_i]$ 内部顶点的双射, 即 δ 为稳定 $\Gamma(M)$ 的每个团且仅仅置换团内部顶点的双射, 显然 $\delta \in \text{Aut}(\Gamma(M))$ 且 δ' 为 $\Gamma_E(M)$ 的恒等自同构, 从而 $\prod_{i=1}^{q^2+q+1} \Sigma_i \subseteq \text{Ker}(\varphi)$ 。故 $\text{Ker}(\varphi) = \prod_{i=1}^{q^2+q+1} \Sigma_i$ 。

$$\text{综上, } \text{Aut}(\Gamma(M)) / \prod_{i=1}^{q^2+q+1} \Sigma_i \cong \text{Aut}(\Gamma_E(M))。$$

证毕。

推论 1 $\text{Aut}(\Gamma(M)) \cong (S_{q(q-1)})^{q^2+q+1} \times S_{q^2+q+1}$

证明 由定理 1 可知,

$$\text{Aut}(\Gamma(M)) / \prod_{i=1}^{q^2+q+1} \Sigma_i \cong \text{Aut}(\Gamma_E(M))$$

而对任意的 $1 \leq i \leq q^2 + q + 1$ 均有 $\Sigma_i \cong S_{[A_i]} \cong S_{q(q-1)}$, 从而 $\prod_{i=1}^{q^2+q+1} \Sigma_i \cong (S_{q(q-1)})^{q^2+q+1}$ 。又由引理 4 可得 $\text{Aut}(\Gamma_E(M)) \cong S_{q^2+q+1}$ 。故

$$\text{Aut}(\Gamma(M)) \cong (S_{q(q-1)})^{q^2+q+1} \times S_{q^2+q+1}$$

证毕。

由推论 1 立得如下推论。

推论 2

$|\text{Aut}(\Gamma(M))| = (q^2 + q + 1)!((q^2 - q)!)^{q^2+q+1}$
 设 $\{j_1, j_2, \dots, j_{q^2+q+1}\} = \{1, 2, \dots, q^2 + q + 1\}$, 令 $\delta(j_1, j_2, \dots, j_{q^2+q+1})$ 为 $V(\Gamma(M))$ 上的双射, 且 $\delta([A_i]) = [A_{j_i}]$, $1 \leq i \leq q^2 + q + 1$ 。由引理 5 易知 $\delta(j_1, j_2, \dots, j_{q^2+q+1})$ 为 $\Gamma(M)$ 的自同构。令

$$\Delta = \{\delta(j_1, j_2, \dots, j_{q^2+q+1}) \mid \{j_1, j_2, \dots, j_{q^2+q+1}\} = \{1, 2, \dots, q^2 + q + 1\}\}$$

由推论 2 立得下述结论。

推论 3 $\text{Aut}(\Gamma(M)) = \Delta$

证明 显然 $\Delta \subseteq \text{Aut}(\Gamma(M))$, 又由

$$|\Delta| = (q^2 + q + 1)!((q^2 - q)!)^{q^2+q+1} = |\text{Aut}(\Gamma(M))|$$

可知, $\text{Aut}(\Gamma(M)) = \Delta$ 。证毕。

参考文献：

[1] AKBARI S, GHANDEHARI M, HADIAN M, et al. On commuting graphs of semisimple rings [J]. Linear Algebra Appl, 2004, 390:345 – 355.

[2] ABDOLLAHI A. Commuting graphs of full matrix rings over finite fields [J]. Linear Algebra Appl, 2008, 428: 2947 – 2954.

[3] MOHAMMADIAN A. On commuting graphs of finite matrix rings [J]. Commun Algebra, 2010, 38:988 – 994.

[4] AKBARI S, MOHAMMADIAN A, RADJAVI H, et al. On the diameters of commuting graphs [J]. Linear Algebra Appl, 2006, 418:161 – 176.

[5] ARAUJO J, KINYON M, KONIECZNY J. Minimal paths in the commuting graphs of semigroups [J]. European J Combin, 2011, 32:178 – 197.

[6] DOLZAN D, OBLAK P. Commuting graphs of matrices over semirings [J]. Linear Algebra Appl, 2011, 435: 1657 – 1665.

[7] GIUDICI M, POPE A. The diameters of commuting graphs of linear groups and matrix rings over the integers modulo m [J]. Australas J Combin, 2010, 48:221 – 230.

[8] SEGEV Y. The commuting graph of minimal nonsolvable groups [J]. Geom Dedicata, 2001, 88:55 – 66.

[9] BABAI L. On the automorphism groups of strongly regular graphs II [J]. J Algebra, 2015, 421:560 – 578.

[10] 霍丽君, 郭文彬, 麻常利. 特征为奇数的广义正交图的自同构[J]. 数学学报, 2014, 57(1):71 – 88.

[11] 孙良. 循环图的自同构群[J]. 北京理工大学学报, 1988(1):1 – 5.

[12] WONG D Y, MA X B, ZHOU J M. The group of automorphisms of a zero-divisor graph based on rank one upper triangular matrices [J]. Linear Algebra Appl, 2014, 460(1):242 – 258.

[13] MORRIS J, SPIGA P, VERRET G. Automorphisms of Cayley graphs on generalised dicyclic groups [J]. Eur J Combin, 2015, 43:68 – 81.

[14] MIRZARGAR M, PACH P P, ASHRAFI A R. The automorphism group of commuting graph of a finite group [J]. Bull Korean Math Soc, 2014, 51(4):1145 – 1153.

[15] MIRZARGAR M, PACH P P, ASHRAFI A R. Remarks on commuting graph of a finite group [J]. Electron Notes Discrete Math, 2014, 45:103 – 106.



(上接第 38 页)

参考文献：

[1] REN J, YANG X, ZHU Q, et al. A novel computer virus model and its dynamics [J]. Nonlinear Anal Real World Appl, 2012, 13: 376 – 384.

[2] YANG L, YANG X, WEN L, et al. A novel computer virus propagation model and its dynamics [J]. Int J Comput Math, 2012, 89: 2307 – 2314.

[3] YANG L, YANG X. The spread of computer viruses under the influence of removable storage devices [J]. Appl Math Comput, 2012, 219: 3914 – 3922.

[4] YANG L, YANG X, ZHU Q, et al. A computer virus model with graded cure rates [J]. Nonlinear Anal Real World Appl, 2013, 14: 414 – 422.

[5] ZHU Q, YANG X, YANG L, et al. Optimal control of computer virus under a delayed model [J]. Appl Math

Comput, 2012, 218: 11613 – 11619.

[6] YANG L, YANG X. The impact of nonlinear infection rate on the spread of computer virus [J]. Nonlinear Dynamics, 2015, 82: 85 – 95.

[7] CHEN L, HATTAF K, SUN J. Optimal control of a delayed SLBS computer virus model [J]. Physical A, 2015, 427: 244 – 250.

[8] MUROYA Y, KUNIYA T. Global stability of nonresident computer virus models [J]. Math Meth App Sci, 2015, 2: 281 – 295.

[9] FORREST S, HOFMAYER S, SOMAYAJI A. Computer immunology [J]. Communications of the ACM, 1997, 40: 88 – 96.

[10] WANG W. Backward bifurcation of an epidemic model with treatment [J]. Math Biosci, 2006, 201: 58 – 71.